CONCURSUL CĂLIN BURDUŞEL

EDIŢIA a II-a, 26 ianuarie 2013

Problema 1

Fie mulţimile A= {n ∈ ℕ| 7n+11 ⋮ 13} şi B= {n ∈ ℕ| 11n+7 ⋮ 13}. Arătaţi că:

a) n ∈ A dacă şi numai dacă n-4 ⋮ 13

b) n ∈ B dacă şi numai dacă n-10 ⋮ 13

c) A ∩ B = ∅

Călin Burduşel

Problema 2

Fie a, b, c, d ∈ ℕ* astfel încât numerele : $\frac{a^3}{bcd}, \frac{b^3}{cda}, \frac{c^3}{dab}, \frac{d^3}{abc}$ sunt naturale.

Demonstraţi că:

a) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$

b) $a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} + d^{2012} = 4(abcd)^{503}$

c) $a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} + d^{2013} = (abcd)^{503}(a + b + c + d)$

Călin Burduşel

Problema 3

Fie paralelogramul ABCD şi punctele: M ∈ (AB); N ∈ (BC) şi fie {P} = AN ∩ CM. Demonstraţi ca DP este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ dacă şi numai dacă AM = CN.

Călin Burduşel

__Notă:__ Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 90 minute

Barem

V1

1) a) n $\in$ A $\rightarrow$ ($\exists$) k $\in \mathbb{N}$, ai 7n + 11 = 13k $\rightarrow$ 7n – 28+28+11 = 7(n-4) +39 = 13k $\rightarrow$ 13|n-4 $\rightarrow$ n-4 $\vdots$ 13 (1,5p)

reciproc: daca n-4 $\vdots$ 13, ($\exists$) k $\in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ n-4=13k $\rightarrow$ n= 13k+4 $\rightarrow$ 7n+11 = 91k+39 = 13(7k+3) $\rightarrow$ 7n+11 $\vdots$ 13 $\rightarrow$ n $\in$ A (1,5p)

b) n $\in$ B $\rightarrow$ ($\exists$) k $\in \mathbb{N}$, ai 11n +7 = 13k $\rightarrow$ 11n -110+110+7= 13k $\rightarrow$ 11(n-10) +117 = 13k $\rightarrow$ 13|n-10$\rightarrow$n-10$\vdots$ 13 (1,5p) reciproc daca n-10$\vdots$ 13$\rightarrow$($\exists$) k $\in \mathbb{N}$ ai n-10= 13k $\rightarrow$n=13k+10 $\rightarrow$11n+7=143k+117= 13(11k+9) $\rightarrow$ 11n+7 $\vdots$ 13 $\rightarrow$ n $\in$B (1,5p)

c) n $\in$ A $\overset{a,b}{\Rightarrow}$ n=13k+4, n $\in$ B $\overset{a,b}{\Rightarrow}$ $n = 13l + 10$, $n \in \mathbb{N}$ (1,5p)

Daca n $\in A \cap B \rightarrow (\exists)\ k, l \in \mathbb{N}$ ai 13l+10=13k+4 $\rightarrow$ 13 l=13 l+6 Fals intrucat 13 nu divide 6 (1,5p)

2) a) Produsul celor 4 numere este 1 … (1,5p)

fiecare numar este 1 (1,5p)

$a^3 = bcd$, deci $a^4 = abcd$ si analoagele (1 p)

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$ (1 p)

b) $a^{2012} = (a^4)^{503}$=$(abcd)^{503}$ si analoagele (1 p)

$a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} + d^{2012} = 4(abcd)^{503}$ (1 p)

c) $a^{2013} = a^{2012} \cdot a = (abcd)^{503} \cdot a$ si analoagele (1 p)

$a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} + d^{2013} = (abcd)^{503}(a + b + c + d)$ (1 p)

3) Fie Q, R, S, T picioarele perpendicularelor din P pe CD, DA, AB, BC (2 p)

$2S_{APC} = 2S_{AMC} - 2s_{APM} = AM \cdot QS - AM \cdot PS = AM \cdot PQ$ (2 p)

si $2S_{APC} = 2S_{ANC} - 2s_{PNC} = CN \cdot RT - CN \cdot PT = CN \cdot PR$ (2 p)

Deci $AM \cdot PQ = CN \cdot PR$ (1,5p)

DP este bisectoarea unghiului ADC daca si numai daca AM=CN (1,5p)